

Exercice 2:

(2)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 6 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -5 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

on cherche un retour d'état de la forme  $u = r - K \cdot x$

avec  $K = (k_1 \ k_2 \ k_3)$

on fixe  $K$  de façon à ce que le polynôme caractéristique  $P_{BF}(p)$  du système en boucle fermée ait pour racines  $-1, -3$  et  $-6$

c'est à dire:  $P_{BF}(p) = (p+1)(p+3)(p+6)$

on vérifie la commandabilité du système

$$C(A, B) = (B \ AB \ A^2B)$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 6 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 15 \\ 6 \\ 15 \end{pmatrix};$$

$$A^2B = A \cdot \underline{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 6 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 \\ 6 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 119 \\ -33 \end{pmatrix}$$



3

$$C(A|B) = \begin{pmatrix} 2 & 15 & 24 \\ 3 & 6 & 119 \\ -1 & 15 & -33 \end{pmatrix}$$

$$\det C(A|B) = 2 \begin{vmatrix} 6 & 119 \\ 15 & -33 \end{vmatrix} - 15 \begin{vmatrix} 3 & 119 \\ -1 & -33 \end{vmatrix} + 24 \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -1 & 15 \end{vmatrix}$$

$$\det C(A|B) = 2 \times (6 \times (-33) - 15 \times 119) - 15 (3 \times (-33) + 119) + 24 (3 \times 15 + 6)$$

$$\det C(A|B) = -42 \neq 0$$

donc rang de la matrice  $C(A|B) = 3 \neq 0$   
 La dimension du système est 3 donc le système est bien commandable.

on cherche maintenant le polynôme caractéristique, c'est à dire le déterminant de la matrice  $(pI - (A - BK))$

$$B \cdot K = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} (k_1 \ k_2 \ k_3) =$$

$$= \begin{pmatrix} 2k_1 & 2k_2 & 2k_3 \\ 3k_1 & 3k_2 & 3k_3 \\ -k_1 & -k_2 & -k_3 \end{pmatrix}$$



(4)

$$pI - (A - BK) = \begin{pmatrix} p-1+2k_1 & -4+2k_2 & 1+2k_3 \\ -6+3k_1 & p+1+3k_2 & -3+3k_3 \\ -2-k_1 & -2-k_2 & p+5-k_3 \end{pmatrix}$$

il faut  $\det(pI - (A - BK)) = P_{BF} = (p+1)(p+3)(p+5)$

$$P_{BF}(p) = p^3 + \underline{9}p^2 + \underline{23}p + \underline{15}$$

$$\det(pI - (A - BK)) = p^3 (2k_1 + 3k_2 - k_3 + 5) + (25k_1 + 21k_2 + 10k_3 - 29)p + 41k_1 + 72k_2 + 71k_3 - 129$$

on a un système de 3 équations à 3 inconnues

$$2k_1 + 3k_2 - k_3 + 5 = 9$$

$$25k_1 + 21k_2 + 10k_3 - 29 = 23$$

$$41k_1 + 72k_2 + 71k_3 - 129 = 15$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2k_1 + 3k_2 - k_3 = 4 \\ 25k_1 + 21k_2 + 10k_3 = 52 \\ 41k_1 + 72k_2 + 71k_3 = 144 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 25 & 21 & 10 \\ 41 & 72 & 71 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 52 \\ 144 \end{pmatrix}$$

$$k_1 = 1.257; \quad k_2 = 0.6941; \quad k_3 = 0.5979$$

$$K = \begin{pmatrix} 1.257 & 0.6941 & 0.5979 \end{pmatrix}$$