TD : Commande par placement de pôles

Exercice 1

On donne la fonction de transfert d'un système en boucle ouverte : $G(p) = \dfrac{10(p+20)}{p(p+3)(p+10)}$

1- Déterminer la représentation d'état de ce système, une représentation d'état à mettre sous la forme : $\begin{cases} x' = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$

2- L'objectif est d'avoir une réponse indicielle de ce système en boucle fermée, avec un dépassement de 9.5% et ce premier dépassement ait lieu à t_{peak} =165 ms.
   a- Déterminer le coefficient d'amortissement m.
   b- En déduire la pulsation propre ω_n du système.

Voir les annexes

3- Donner le polynôme de second degré $D_1(p) = p^2+2m\omega_n p+\omega_n^2$

4- Calculer le gain du retour d'état K =[k_1 k_2 k_3], *qui permettrait d'atteindre l'objectif précisé à la Question 2, le polynôme caractéristique désiré contiendra aussi le pôle -20, afin de compenser le zéro de la fonction de transfert (On calculera le déterminant de la matrice λ I-(A – B.K), puis l'identifier au polynôme caractéristique désiré)*

Exercice 2 :

La représentation d'état d'un système sous forme canonique commandable est donnée par

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0.4 & -1.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \quad ; \quad y = \begin{pmatrix} 0.8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Le même système peut être représenté par les équations d'états suivantes, sous forme canonique observable

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -0.4 \\ 1 & -1.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.8 \\ 1 \end{pmatrix} u \quad ; \quad y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que le système sous la première forme est commandable mais non observable.
2. Montrer que le système sous la deuxième forme est observable mais non commandable.
3. Calculer la fonction de transfert équivalente dans les deux cas.
4. Expliquer ce qui provoque la différence apparente dans la commandabilité et l'observabilité entre les deux représentations malgré qu'on a le même système.

Exercice 3 :

Soit le système linéaire $\dot{x} = Ax + Bu$; $y = Cx$ avec

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Le système est-il stable ? justifier.
2. Calculer la fonction de transfert $Y(p)/U(p)$.
3. Déduire l'équation différentielle décrivant le système.

ANNEXE

COMMANDE ANALOGIQUE : DÉFINITIONS, COURBES ET ABAQUES

SYSTÈME DU SECOND ORDRE

$$H(p)=\frac{1}{1+2\xi\dfrac{p}{\omega_n}+\left(\dfrac{p}{\omega_n}\right)^2}$$

ξ = facteur d'amortissement
ω_n = pulsation propre non amortie

SYSTÈME DU PREMIER ORDRE

$$H(p)=\frac{1}{1+Tp}$$

T = constante de temps
$\omega_c = 1/T$ = pulsation de coupure

MODÈLE DU SECOND ORDRE

1. La réponse indicielle

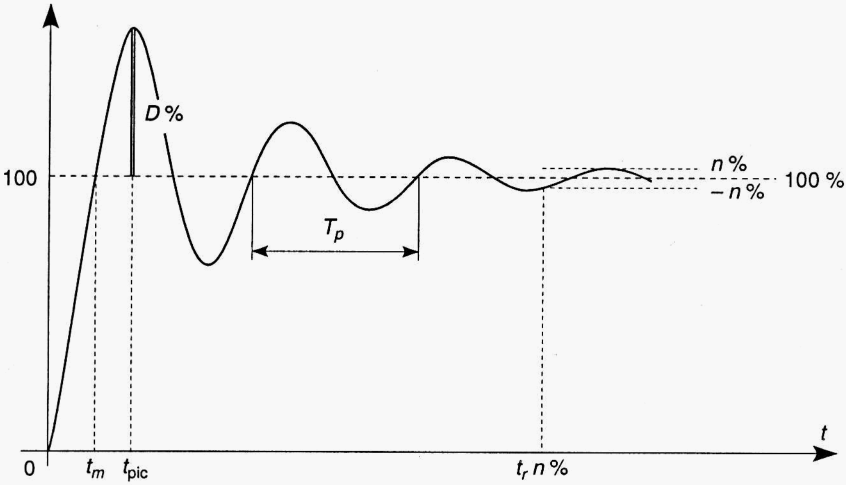

Figure A.1.

Temps de montée (*)	$t_m = \frac{1}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} (\pi - \text{Arccos}\,\xi)$
Temps de réponse à n % ($\xi < 0{,}7$)	$t_r \approx \frac{1}{\omega_n \xi} \text{Log}_e \frac{100}{n}$
Temps de pic	$t_{pic} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}$
Pseudo-période	$T_p = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}$
Pseudo-pulsation	$\omega_p = \omega_n \sqrt{1-\xi^2}$
Dépassement	$D\,\% = 100\, e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}}$
Rapport de 2 maxima successifs	$\frac{D_1}{D_2} = e^{2\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}}$
Nombre d'oscillations complètes	$n \approx Q = \frac{1}{2\xi}$

(*) t_m se définit aussi comme le temps nécessaire pour passer de 10 % à 90 % de la valeur finale.

2. La réponse fréquentielle

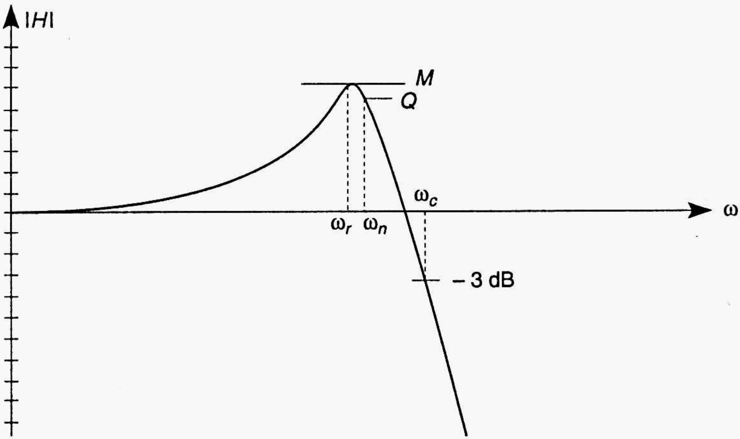

Figure A.2.

Pulsation de résonance	$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}$
Pulsation de coupure	$\omega_c = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2 + \sqrt{1 + (1 - 2\xi^2)^2}}$
Facteur de résonance	$m = \dfrac{1}{2\xi \sqrt{1 - \xi^2}}$
Facteur de qualité	$Q = \dfrac{1}{2\xi}$
En décibels	$M_{dB} = 20 \log m$
	$Q_{dB} = 20 \log Q$
On a aussi	$Q = \dfrac{1}{2} \dfrac{1}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{\pi}{t_{pic} \omega_n}\right)}}$

3. Modèle du 2^e ordre

Le tableau des valeurs numériques

Amortissement inférieur à 1										
ξ	Paramètres temporels					Paramètres fréquentiels				ξ
	$t_m\omega_n$	$t_r\omega_n$ (5 %)	$t_{pic}\omega_n$	$T_p\omega_n$	D %	$\frac{\omega_R}{\omega_n}$	$\frac{\omega_c}{\omega_n}$	$\frac{\omega_c}{\omega_R}$	M_{dB}	
0,1	1,68	30	3,16	6,31	73	0,99	1,54	1,56	14	**0,1**
0,15	1,74	20	3,18	6,36	62	0,98	1,53	1,56	10,5	**0,15**
0,2	1,81	14	3,21	6,41	53	0,96	1,51	1,57	8,1	**0,2**
0,25	1,88	11	3,24	6,49	44	0,94	1,48	1,59	6,3	**0,25**
0,3	1,97	10,1	3,29	6,59	37	0,91	1,45	1,61	4,8	**0,3**
0,35	2,06	7,9	3,35	6,71	31	0,87	1,42	1,63	3,6	**0,35**
0,4	2,16	7,7	3,43	6,86	25	0,82	1,37	1,67	2,7	**0,4**
0,45	2,28	5,4	3,52	7,04	21	0,77	1,33	1,72	1,9	**0,45**
0,5	2,42	5,3	3,63	7,26	16	0,71	1,27	1,80	1,2	**0,5**
0,55	2,58	5,3	3,76	7,52	12,6	0,63	1,21	1,93	0,7	**0,55**
0,6	2,77	5,2	3,93	7,85	9,5	0,53	1,15	2,17	0,3	**0,6**
0,65	3,00	5,0	4,13	8,27	6,8	0,39	1,08	2,74	0,1	**0,65**
0,7	3,29	3	4,40	8,80	4,6	0,14	1,01	7,14	0	**0,7**
0,75	3,66	3,1	4,75	9,50	2,84	–	0,94	–	–	**0,75**
0,80	4,16	3,4	5,24	10,5	1,52	–	0,87	–	–	**0,80**
0,85	4,91	3,7	5,96	11,93	0,63	–	0,81	–	–	**0,85**
0,90	6,17	4	7,21	14,41	0,15	–	0,75	–	–	**0,90**
0,95	9,09	4,1	10,06	20,12	0,01	–	0,69	–	–	**0,95**

$$H(p)=\frac{1}{1+2\xi\frac{p}{\omega_n}+\left(\frac{p}{\omega_n}\right)^2} \qquad \xi \quad \omega_n$$

$$H(p)=\frac{1}{(1+T_1p)(1+T_2p)} \qquad \xi=\frac{1}{2}\frac{T_1+T_2}{\sqrt{T_1T_2}} \quad \omega_n=\frac{1}{\sqrt{T_1T_2}}$$

$$H(p)=\frac{1}{(1+Tp)^2} \qquad \xi=1 \quad \omega_n=\frac{1}{T}$$

Amortissement supérieur à 1					
ξ	temps de réponse $t_r\omega_n$			pulsation de coupure $\frac{\omega_c}{\omega_n}$	ξ
	10 %	5 %	2 %		
1	3,9	4,8	5,8	0,64	**1**
1,25	5,2	6,6	8,4	0,47	**1,25**
1,5	6,4	8,2	10,8	0,37	**1,5**
1,75	7,7	9,9	13,0	0,31	**1,75**
2	8,9	11,4	14,6	0,27	**2**
2,25	10,0	13,0	16,5	0,23	**2,25**