(1)

Correction TD1 : TZ

Exercice 1 :

a) $x(n+1) = x(n)+4 \quad x(0)=2$

On applique la TZ aux deux membres de l'équation :

$$z\left(X(z) - x(0)\right) = X(z) + 4\frac{z}{z-1}$$

$$\Rightarrow X(z)(z-1) = z\,x(0) + \frac{4z}{z-1}$$

$$\Rightarrow X(z) = \frac{2z}{z-1} + \frac{4z}{(z-1)^2}$$

Rappel sur les TZ usuelles :

$x(n)$	$X(z)$	Domaine de convergence
(*) n $\longrightarrow$	$\frac{z}{(z-1)^2}$	$\lvert z\rvert>1$
n^2 $\longrightarrow$	$\frac{z(z+1)}{(z-1)^2}$	$\lvert z\rvert>1$
(*) $u(n)=1$	$\frac{z}{z-1}$	$\lvert z\rvert>1$
$\alpha^n \; (\alpha\in\mathbb{C}^*)$	$\frac{z}{z-\alpha}$	$\lvert z\rvert>\lvert\alpha\rvert$
$\delta(n-k)=\begin{cases}1 & \text{si } k=n\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$ $k\in\mathbb{N}$	z^{-k}	$\lvert z\rvert>0$
$e^{-an} \; (a\in\mathbb{C})$	$\frac{z}{z-e^{-a}}$	$\lvert z\rvert>\lvert e^{-a}\rvert$
$\sin(n\omega)$	$\frac{z^2-2z\cos(\omega)+1}{z^2-2z\cos(\omega)+1}$	$\lvert z\rvert>1$
$\cos(n\omega)$	$\frac{z^2-2z\cos(\omega)+1}{z^2-z\cos\omega}$	$\lvert z\rvert>1$
$\frac{a^n}{n!} \; (a\in\mathbb{C})$	$e^{a/z}$	$\lvert z\rvert>0$

donc d'après la table :

$$\frac{2z}{z-1} \xrightarrow{TZ^{-1}} 2u(n)$$

$$\frac{4z}{(z-1)^2} \xrightarrow{TZ^{-1}} 4.n$$

donc $\boxed{x(n) = 4n+2}$

b) $x(n+1) - 3x(n) = 4n \qquad x(0) = 2$

on applique la TZ aux 2 membres de l'équation.

$$z\left(X(z) - x(0)\right) - 3X(z) = \frac{4z}{(z-1)^2}$$

$$z(X(z) - 2) - 3X(z) = \frac{4z}{(z-1)^2}$$

$$X(z)(z-3) = 2z + \frac{4z}{(z-1)^2}$$

$$X(z) = \frac{2z}{z-3} + \frac{4z}{(z-3)(z-1)^2}$$

il faut décomposer $\frac{4}{(z-3)(z-1)^2}$ en éléments simples

$$X_1(z) = \frac{4}{(z-3)(z-1)^2} = \frac{A}{z-3} + \frac{B}{z-1} + \frac{C}{(z-1)^2}$$

$$A = X_1(z)(z-3)\Big|_{z=3} = \frac{4}{(z-1)^2}\Big|_{z=3} = 1$$

$$X_1(z) = \frac{1.(z-1)^2 + B(z-1)(z-3) + C(z-3)}{(z-3)(z-1)^2}$$

$$X_1(z) = \frac{z^2 - 2z + 1 + Bz^2 - 4Bz + 3B + Cz - 3C}{(z-3)(z-1)^2}$$

$$X_1(z) = \frac{z^2(1+B) + (C - 2 - 4B)z + 1 + 3B - 3C}{(z-3)(z-1)^2}$$

$$\begin{cases} B+1=0 \\ C-2-4B=0 \\ 1+3B-3C=4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} B=-1 \\ C=2+4B=-2 \\ C=\dfrac{1+3B-4}{3} \end{cases}$$

$$C=\frac{1+3(-1)-4}{3}=-\frac{6}{3}=\underline{\underline{-2}}$$

donc $X(z)=\dfrac{2z}{z-3}+\dfrac{4z}{(z-3)(z-1)^2}$

$$X(z)=\frac{2z}{z-3}+\frac{z}{z-3}-\frac{z}{z-1}-\frac{2z}{(z-1)^2}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$2.(3)^n \qquad 3^n \qquad 1 \qquad -2n$$

$$x(n)=\left(2\,3^n+3^n-1-2n\right)u(n)$$

$$x(n)=\left(3.3^n-1-2n\right)\underbrace{u(n)}_{\text{échelon}}$$

$$\boxed{x(n)=\left(3^{n+1}-1-2n\right)u(n)}$$

on vérifie que $x(0)=3-1=\underline{2}$

c) $x(n)-4x(n-1)+3x(n-2)=2\delta(n)$

avec $x(-1)=x(-2)=0$

$$X(z)-4z^{-1}X(z)+3z^{-2}X(z)=2$$

$$X(z)=\frac{2}{1-4z^{-1}+3z^{-2}}=\frac{2z^2}{z^2-4z+3}$$

$$X(z)=\frac{2z^2}{(z-1)(z-3)}$$

il faut décomposer $\frac{X(z)}{z} = \frac{2z}{(z-1)(z-3)}$ en éléments simples.

$$X_1(z) = \frac{2z}{(z-1)(z-3)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-3}$$

$$A = X_1(z)(z-1)\Big|_{z=1} = \frac{2z}{z-3}\Big|_{z=1} = -1$$

$$B = X_1(z).(z-3)\Big|_{z=3} = \frac{2z}{z-1}\Big|_{z=3} = 3$$

donc $X(z) = z \times (X_1(z)) = \frac{-z}{z-1} + \frac{3}{z-3}$

$-1 \qquad 3.3^n$

$$x(n) = \underbrace{(-1 + 3 \times 3^n)\, u(n)}_{\text{échelon}}$$

$$\boxed{x(n) = 3^{n+1} - 1}$$

vérification :

$x(0) = 2$; $x(1) = 8$, $x(2) = 26$

$$x(n) - 4x(n-1) + 3x(n-2) = 2\delta(n)$$

$$x(n+2) - 4x(n+1) + 3x(n) = 2\delta(n+2)$$

$n = 0 \longrightarrow \quad x(2) - 4x(1) + 3x(0) = 2\delta(2)$

$$26 - 4 \times 8 + 3\,2 = 0$$