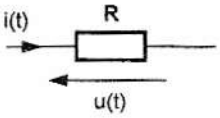
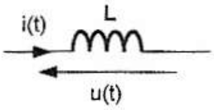
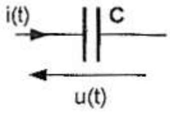
Régime variable : équations différentielles	Fiche de synthèse n°4

Définitions du régime variable

Un circuit électrique fonctionne en **régime variable** lorsqu'il est alimenté par des sources de courant ou de tension fonctions du temps ou lorsque la configuration du circuit est modifiée, à un instant donné, par l'ouverture ou la fermeture d'un interrupteur par exemple. Les **signaux** (courants et tensions) sont alors **variables**, fonctions du temps. On appelle **valeur instantanée**, l'expression temporelle d'un signal, que l'on note par une lettre minuscule : par exemple **u(t)**, **i(t)**, etc.

Equations de fonctionnement des dipôles passifs

Résistance	Bobine parfaite	Condensateur parfait
		
R : résistance en **Ω** (ohms)	**L** : inductance en **H** (henrys)	**C** : capacité en **F** (farads)
Relation tension - courant :	Relation tension - courant :	Relation tension - courant :
$\boxed{u(t) = R \cdot i(t)}$	$\boxed{u(t) = L\dfrac{di(t)}{dt}}$	$\boxed{i(t) = C\dfrac{du(t)}{dt}}$

Remarques IMPORTANTES :

- En régime continu, une bobine se comporte comme un **court - circuit** (simple fil) : **u = 0**
- **Le courant dans une bobine ne peut JAMAIS subir de discontinuité.**

- En régime continu, un condensateur se comporte comme un **circuit ouvert** : **i = 0**
- **La tension aux bornes d'un condensateur ne peut JAMAIS subir de discontinuité.**

Mise en équations et résolution du problème posé

On se place dans le cas simple, mais classique, où le circuit étudié n'est constitué que d'une maille, celle-ci comportant, entre autres, des bobines et / ou des condensateurs.

Pour résoudre le problème, il faut suivre la démarche proposée :

- ☐ On commence par **analyser le fonctionnement des interrupteurs** du montage. A chaque état des interrupteurs correspond une configuration du circuit, donc un problème différent à traiter.

- ☐ On écrit les **lois de Kirchhoff** (lois des nœuds et des mailles) pour le circuit, en faisant intervenir les équations de fonctionnement des dipôles élémentaires. On obtient ainsi une **équation différentielle linéaire** du **1er ordre** ou du **2nd ordre** (on n'ira pas au-delà dans ce mémento !) ayant comme inconnue le signal **s(t)** cherché :

$$\boxed{f\big(s(t), ds(t)/dt\big) = e(t)} \quad \text{ou} \quad \boxed{f\Big(s(t), ds(t)/dt, d^2s(t)/dt^2\Big) = e(t)}$$

- ☐ On recherche la solution générale $\mathbf{s_1(t)}$ de l'équation sans second membre (**SGESSM**).

- ☐ On recherche la solution particulière $\mathbf{s_2(t)}$ de l'équation avec second membre (**SPEASM**).
(**de même nature que le second membre**, très souvent CONSTANT en concours)

La solution de l'équation différentielle s'écrit alors : $\boxed{s(t) = s_1(t) + s_2(t)}$

Les constantes apparaissant dans la solution sont déterminées par les conditions initiales (CI).

Equations différentielles classiques en génie électrique

1er ordre	2nd ordre
$\tau\dfrac{ds(t)}{dt} + s(t) = e(t) = E = C^{ste}$	$\dfrac{1}{\omega_0^2}\dfrac{d^2s(t)}{dt^2} + \dfrac{2m}{\omega_0}\dfrac{ds(t)}{dt} + s(t) = e(t) = E = C^{ste}$

Résolution d'une équation du 1^er^ ordre à second membre constant

Un circuit du 1[er] ordre est généralement régi par une équation différentielle de la forme suivante :

Pour t > 0 :

$$\boxed{\tau\frac{ds(t)}{dt}+s(t)=e(t)=E=C^{ste}} \quad (1)$$

Constante de temps (τ) — *Second membre constant* (E)
(C'est aussi la SPEASM $s_2(t)$!)

En génie électrique, la solution **s(t)** recherchée est très souvent :

- une tension **u(t)** *(cas d'un circuit RC)*
- un courant **i(t)** *(cas d'un circuit RL)*
- une vitesse de rotation **Ω(t)** *(cas d'une machine à courant continu)*

Rédaction attendue en génie électrique

La solution générale de l'équation différentielle (1) est de la forme : $s(t)=\underbrace{K\cdot e^{-t/\tau}}_{\substack{\text{SGESSM}\\ s_1(t)}}+\underbrace{E}_{\substack{\text{SPEASM}\\ s_2(t)}}$

On détermine la constante **K** à l'aide de la condition initiale à **t = 0⁺** :
$s(0^+)=S_0 \Rightarrow K=S_0-E$

La solution générale s'écrit donc : $\boxed{s(t)=E+(S_0-E)\cdot e^{-t/\tau}}$

*Régime **permanent** (ou forcé) atteint à $t\to+\infty$: $s\to E$* (E)

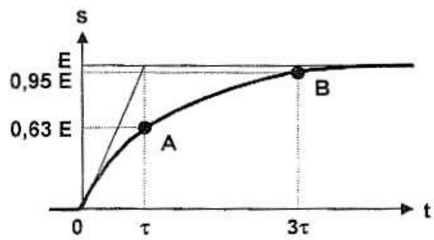
*Régime **transitoire** (ou libre) disparaît au bout de 3 à 5τ* ($(S_0-E)\cdot e^{-t/\tau}$)

Représentation graphique

Tracé de la courbe de réponse pour $S_0 = 0$:

$$\boxed{s(t)=E\cdot\left(1-e^{-t/\tau}\right)}$$

- **Placer** les points A (τ ; 0,63.E) et B (3τ ; 0,95.E) ;
- **Construire** la tangente à l'origine ;
  *(elle coupe l'asymptote **s = E** en **t = τ**)*
- **Esquisser** alors le tracé réel.



Résolution d'une équation du 2^nd^ ordre à second membre constant

Un circuit du 2[nd] ordre est généralement régi par une équation différentielle de la forme suivante :

Pour t > 0 :

$$\boxed{\frac{1}{\omega_0^2}\frac{d^2s(t)}{dt^2}+\frac{2m}{\omega_0}\frac{ds(t)}{dt}+s(t)=e(t)=E=C^{ste}}$$

avec ω_0 : pulsation propre du circuit (en **rad/s**)
m : coefficient d'amortissement du circuit noté aussi ξ ou **z** (sans unité et ≥ 0)

La résolution de cette équation suit un cheminement légèrement plus élaboré que dans le cas d'un circuit du **1[er] ordre** car une discussion sur la valeur de certaines grandeurs (en particulier **m**) s'impose.

Etude du régime libre

On commence par poser l'équation caractéristique (EC) : $\frac{1}{\omega_0^2}r^2+\frac{2m}{\omega_0}r+1=0$
r : racine de l'équation caractéristique

On en déduit l'expression du discriminant Δ : $\Delta=\left(\frac{2m}{\omega_0}\right)^2-\frac{4}{\omega_0^2}=\frac{4}{\omega_0^2}\cdot(m^2-1)$

La discussion peut alors s'engager sur les valeurs de **m**. On distingue **3 cas** (cf. tableau page suivante).

Régime variable : équations différentielles	Fiche de synthèse n°4

	Racines de l'EC	SGESSM
$m > 1$	$\boxed{\Delta > 0}$: 2 racines **réelles** de même signe $r_{1,2} = -m\,\omega_0 \pm \omega_0 \cdot \sqrt{m^2 - 1}$	$\boxed{s_1(t) = A\,e^{r_1 t} + B\,e^{r_2 t}}$ Régime libre **apériodique amorti**
$m = 1$	$\boxed{\Delta = 0}$: il y a 1 racine **double réelle** $r = -\omega_0$	$\boxed{s_1(t) = e^{-\omega_0 t} \cdot (A\,t + B)}$ Régime libre **critique**
$0 \leq m < 1$	$\boxed{\Delta < 0}$: 2 racines **complexes conjuguées** $r_{1,2} = -m\,\omega_0 \pm j\underbrace{\omega_0 \cdot \sqrt{1 - m^2}}_{\omega_p}$ On pose $\omega_p = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - m^2}$ la **pseudo - pulsation** des oscillations	$\boxed{s_1(t) = e^{-m\omega_0 t} \cdot (A\cos\omega_p t + B\sin\omega_p t)}$ $\Downarrow$ $s_1(t) = S_{max} \cdot e^{-m\omega_0 t} \cdot \sin(\omega_p t + \varphi)$ où $S_{max} = \sqrt{A^2 + B^2}$ et $\tan\varphi = \frac{A}{B}$ Régime libre **oscillant amorti**

Etude du régime forcé

	Solution complète	Représentation graphique

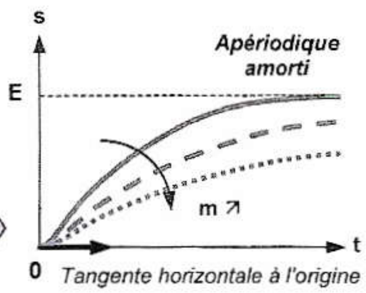
$m > 1$

$$s(t) = \underbrace{A\,e^{r_1 t} + B\,e^{r_2 t}}_{\text{SGESSM}} + \underbrace{E}_{\text{SPEASM}}$$

En tenant compte des CI : $s(0) = 0$, $\frac{ds(0)}{dt} = 0$

$$\boxed{s(t) = E \cdot \left[1 - \frac{1}{\tau_1 - \tau_2} \cdot \left(\tau_1 \cdot e^{-t/\tau_1} - \tau_2 \cdot e^{-t/\tau_2}\right)\right]}$$

avec **$\tau_1 = -1 / r_1$** et **$\tau_2 = -1 / r_2$**

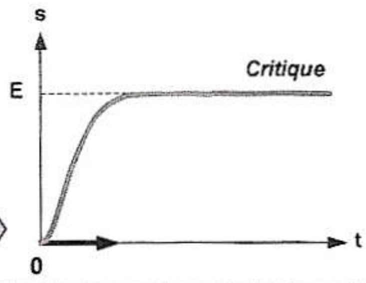


$m = 1$

$$s(t) = \underbrace{e^{-\omega_0 t} \cdot (A\,t + B)}_{\text{SGESSM}} + \underbrace{E}_{\text{SPEASM}}$$

En tenant compte des CI : $s(0) = 0$, $\frac{ds(0)}{dt} = 0$

$$\boxed{s(t) = E \cdot \left[1 - (1 + \omega_0 t) \cdot e^{-\omega_0 t}\right]}$$



$0 \leq m < 1$

$$s(t) = \underbrace{S_{max} \cdot e^{-m\omega_0 t} \cdot \sin(\omega_p t + \varphi)}_{\text{SGESSM}} + \underbrace{E}_{\text{SPEASM}}$$

En tenant compte des CI : $s(0) = 0$, $\frac{ds(0)}{dt} = 0$

$$\boxed{s(t) = E \cdot \left[1 - \sin(\omega_p t + \varphi) \cdot \frac{e^{-m\omega_0 t}}{\sqrt{1 - m^2}}\right]}$$

avec **$\cos\varphi = m$**