Correction 1

## Exercice 1

FTBO : $G(p) = \dfrac{K}{1+\frac{2m}{\omega_0}p+\frac{p^2}{\omega_0^2}}$

FTBF = $H(p) = \dfrac{G(p)}{1+G(p)} = \dfrac{K}{1+\frac{2m}{\omega_0}p+\frac{p^2}{\omega_0^2}+K}$

$$H(p) = \frac{\frac{K}{K+1}}{1+\frac{2m}{(K+1)\omega_0}p+\frac{p^2}{(K+1)\omega_0^2}} = \frac{K'}{1+\frac{2m'}{\omega_0'}p+\frac{p^2}{\omega_0'^2}}$$

avec $\boxed{K' = \frac{K}{K+1}}$ : amplification statique en boucle fermée

elle est divisée par $(K+1)$

$$\omega_n'^2 = \omega_0'^2 = (K+1)\omega_0^2 \Longrightarrow \omega_0' = \omega_0\sqrt{K+1}$$

$$\boxed{\omega'_n = \omega_n\sqrt{K+1}}$$

la bande passante est multipliée par $\sqrt{K+1}$

le système devient plus rapide

$\boxed{m' = \frac{m}{\sqrt{K+1}}}$ : le coefficient d'amortissement est divisé par $\sqrt{K+1}$

## Exercice 2

1°) on calcule le 1er dépassement en %

$$D_1\% = \frac{S_{max} - S(\infty)}{S(\infty)} \times 100 = \frac{72-50}{50} \times 100 = 44\%$$

$$D_1 = e^{\frac{-m\pi}{\sqrt{1-m^2}}} = 0{,}44 \Longrightarrow m\,?$$

ou on utilise l'abaque

on tombe sur un coefficient d'amortissement

$$\boxed{m = 0{,}25}$$

on a $tr_{5\%} \simeq 0{,}48\,s$

D'après le tableau le produit

$$\omega_n . tr_{5\%} = 11 \quad \text{pour } m = 0{,}25$$

$$\Rightarrow \omega_n = \frac{11}{tr_{5\%}} = \frac{11}{0{,}48} = 22{,}9 \text{ rad } s^{-1}$$

$$\boxed{\omega_n \simeq 23 \text{ rad.s}^{-1}}$$

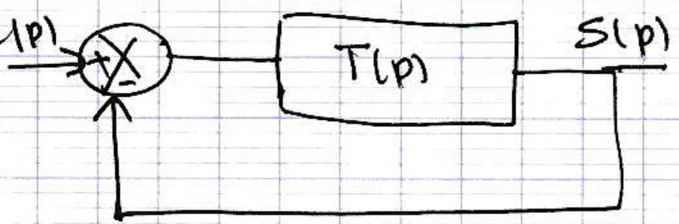
$$K = \frac{S(\infty)}{E} = \frac{50}{10} = 5 .$$

donc la FTBO du système est:

$$G(p) = \frac{5}{1 + \frac{2 \times 0{,}25}{23} p + \frac{p^2}{23^2}}$$

$$\boxed{G(p) = \frac{5}{1 + 0{,}02174 p + 0{,}0019 p^2}}$$

2°)




$T(p) = G(p)$

a) FTBF : $H(p) = \frac{5}{0{,}0019 p^2 + 0{,}02174 p + 6}$

critère de ROUTH

| | | |
|---|---|---|
| $p^2$ | 0,0019 | 6 |
| $p$ | 0,02174 | 0 |
| $p^0$ | 6 | 0 |

Tous les coefficients de la 1ère colonne sont positifs $\Rightarrow$ système stable en B Fermée.

b) on a $K' = \frac{K}{K+1} = \frac{5}{5+1} = 5/6$

$\boxed{K' = 0{,}834}$

$m' = \frac{m}{\sqrt{K+1}} = \frac{0{,}25}{\sqrt{5+1}} = 0{,}102$

$\omega_n' = \omega_n \times \sqrt{K+1} = 23 \times \sqrt{5+1} = 56{,}4$ rad s$^{-1}$

c) Pour $m \simeq 0{,}1 \Longrightarrow$ d'après l'abaque

$tr_{5\%} \times \omega_n' = 30 \Longrightarrow tr_{5\%} = \frac{30}{\omega'_n}$

$tr_{5\%} = \frac{30}{56{,}4} = 0{,}532\,s = 532\,ms$

d) l'amplification statique diminue $K' = \frac{K}{K+1}$
la précision diminue aussi

3°/ $C(p) = K\left(1 + \frac{1}{T_i p} + T_d p\right)$

a) FTBO :

$G'(p) = T(p) \times C(p)$

$G'(p) = \frac{5K(1 + T_i p + T_d T_i p^2)}{(0{,}0019p^2 + 0{,}02174p + 1)T_i p}$

FTBF :

$H'(p) = \frac{C(p) \times T(p)}{1 + C(p) \times T(p)} = \frac{5K(1 + T_i p + T_d T_i p^2)}{T_i p(0{,}0019p^2 + 0{,}02174p + 1) + 5K(1 + T_i p + T_d T_i p^2)}$

$H'(p) = \frac{5K(1 + T_i p + T_d T_i p^2)}{T_i p(1 + 0{,}02174p + 0{,}0019p^2) + 5K(1 + T_i p + T_d T_i p^2)}$

b) on veut que $H'(p) = \frac{K_0}{1+3p}$

## Exercice 3

$$G(p) = \frac{10}{p^2+2p-8}$$

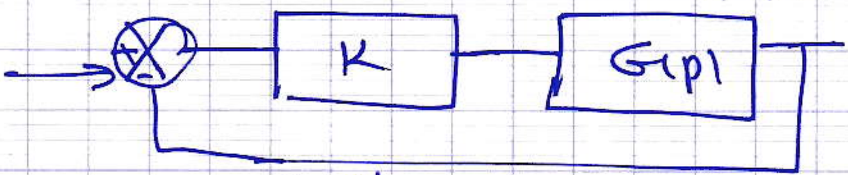
1e/ $p^2 - 2p - 8 = (p+4)(p-2)$

la fonction TBO : $G(p)$ a deux pôles
$p = -4$ et $p = +2$

le système a un pôle positif : donc il est bien INSTABLE.

2e/ $$G(p) = \frac{10}{(p+4)(p-2)}$$

3e/ FTBF : $$H(p) = \frac{G(p).K}{1+KG(p)}$$




$$H(p) = \frac{10K}{p^2+2p-8+10K}$$

4e/ critère de ROUTH

| | | |
|---|---|---|
| $p^2$ | 1 | $10K-8$ |
| $p^1$ | $+2$ | 0 |
| $p^0$ | $10K-8$ | 0 |

il faut que $10K-8>0 \Longrightarrow K > \frac{8}{10}$

$$\boxed{K > 0{,}8}$$

5e/ on a un régime apériodique lorsque $m > 1$

il faut que $\Delta > 0$

$p^2+2p+(10K-8) > 0$

$\Delta = 2^2 - 4(10K-8) = 4 - 40K + 32$

$$\Delta = 36 - 40K > 0$$

$$\Rightarrow K < \frac{36}{40} \Rightarrow \boxed{K < 0{,}9}$$

on prend $\boxed{K = 0{,}85}$

car $K > 0{,}8$ aussi

6°) $S(p) = E(p) \times H(p)$

valeur finale :

$$S(+\infty) = \lim_{p \to 0} p\,S(p) = \lim_{p \to 0} p\,\underbrace{E(p) \times H(p)}_{S(p)}$$

$$S(+\infty) = \lim_{p \to 0} \cancel{p}\,\frac{1}{\cancel{p}} \times \frac{10K}{p^2 + 2p - 8 + 10K}$$

$$S(+\infty) = \frac{10K}{10K - 8} = \frac{10 \times 0{,}85}{10 \times 0{,}85 - 8} = 17$$

erreur indicielle

$$\varepsilon_i = \lim_{p \to 0} p\,\varepsilon(p) = \lim_{p \to 0} p\,E(p)\left(1 - H'(p)\right)$$

$$\varepsilon_i = \lim_{p \to 0} \cancel{p} \times \frac{1}{\cancel{p}}\left(1 - \frac{10K}{p^2 + 2p + 10K - 8}\right)$$

$$\varepsilon_i = \lim_{p \to 0} \left(1 - \frac{10K}{p^2 + 2p + 10K - 8}\right) = 1 - \frac{10K}{10K - 8}$$

$K = 0{,}85$ $\quad \varepsilon_i = \left|1 - \frac{8{,}5}{0{,}5}\right| = 16 \qquad \varepsilon_i = 1600\,\%$

$$\varepsilon_v = \lim_{p \to 0} p \times \frac{1}{p^2}\left(1 - \frac{10K}{p^2 + 2p + 10K - 8}\right)$$

$$\varepsilon_v = \lim_{p \to 0} \frac{1}{p}\left(\frac{p^2 + 2p - 8}{p^2 + 2p + 10K - 8}\right) = \infty$$

$$\boxed{\varepsilon_v = +\infty}$$

$$H'(p) = \frac{8{,}5}{p^2 + 2p + 0{,}5} = \frac{17}{1 + \frac{2}{0{,}5}p + \frac{p^2}{0{,}5}}$$

$$\omega_n = \sqrt{0{,}5} = 0{,}707 \text{ rad.s}^{-1}$$

$$\frac{2m}{\omega_n} = \frac{2}{0{,}5} \Rightarrow m = \frac{\omega_n}{0{,}5} = 1{,}404$$

$\Rightarrow$ tableau $m \simeq 1{,}404 \Rightarrow t_r \omega_n = 8{,}2$

$t_r = \frac{8{,}2}{\omega_n}$

$t_r = 11{,}6\,s$

## c) Régulateur PD

$$C(p) = K(1+T_d p)$$
$$G(p) = \frac{10}{p^2+2p-8}$$

7°) FTBO : $G'(p) = C(p) \times G(p)$

$$G'(p) = \frac{10K(1+T_d p)}{(p-2)(p+4)}$$

8°) $T_d = 4$
$K = 0,85$ $\quad G'(p) = \frac{8,5}{p-2}$

FTBF : $H'(p) = \frac{8,5}{p-2+8,5}$

$$H'(p) = \frac{8,5}{p+6,5}$$

erreur indicielle :

$$\varepsilon_i = \lim_{p \to 0} p\, \varepsilon(p) = \lim_{p \to 0} p\, E(p)(1 - H'(p))$$

$$E(p) = \frac{1}{p} \Rightarrow \varepsilon_i = \lim_{p \to 0} \cancel{p} \times \frac{1}{\cancel{p}}\left(1 - \frac{8,5}{p+6,5}\right)$$

$$\varepsilon_i = \left|1 - \frac{8,5}{6,5}\right| = |0,307| = 30,7\%$$

erreur de traînage (vitesse)

$$\varepsilon_v = \lim_{p \to 0} p\, \varepsilon(p) = \lim_{p \to 0} E(p)(1 - H'(p))$$

$$\varepsilon_v = \lim_{p \to 0} \frac{1}{p^2}\left(1 - \frac{8,5}{p+6,5}\right) = \lim_{p \to 0} \frac{1}{p}\left(\frac{p-2}{p+6,5}\right)$$

$$\boxed{\varepsilon_v = +\infty}$$