

## Correction

### Exercice 1:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C = (0, 1) \\ D = 0$$

19/

$$p_1 = -3 \text{ et } p_2 = -4$$

D'abord on vérifie que le système est

commandable:

système ordonné:

$$n = 2$$

$$C(A, B) = (B \quad AB)$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C(A, B) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \det(C(A, B)) = 1$$

$\Rightarrow$  rang de la matrice  $C(A, B) = 2 = n$

donc le système est complètement commandable.

le polynôme caractéristique en boucle fermée avec le retour d'état:

$$P_{BF}(\lambda) = (\lambda - (-3))(\lambda - (-4)) = (\lambda + 3)(\lambda + 4)$$

$$P_{BF}(\lambda) = \lambda^2 + 7\lambda + 12$$

donc on cherche un retour d'état de la

forme:  $u = r - K \cdot x$  avec  $K = (k_1, k_2)$

on construit la matrice:

$$A - BK = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \end{pmatrix}$$

$$A - BK = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A - BK = \begin{pmatrix} -1 - k_1 & -1 - k_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

on calcule maintenant les valeurs propres de la matrice  $(A - BK)$

$$(\lambda I - (A - BK)) = \begin{pmatrix} \lambda + 1 + k_1 & 1 + k_2 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda I - (A - BK)) = \lambda(\lambda + 1 + k_1) + 1 + k_2$$

$$P_{BF}(\lambda) = \lambda^2 + \lambda(1 + k_1) + 1 + k_2 = \lambda^2 + 7\lambda + 12$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 + k_1 = 7 \\ 1 + k_2 = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = 6 \\ k_2 = 11 \end{cases}$$

$$K = \begin{pmatrix} 6 & 11 \end{pmatrix}$$



20)  $P_{BF} = p^2 + 6p + 5$

il s'agit du même système donc il est bien commandable.

on a le même polynôme caractéristique:

$$P_{BF}(\lambda) = \lambda^2 + (k_1 + 1)\lambda + (k_2 + 1) = p^2 + 6p + 5$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k_1 + 1 = 6 \\ k_2 + 1 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = 5 \\ k_2 = 4 \end{cases}$$

$$K = \begin{bmatrix} 5 & 4 \end{bmatrix}$$

Exercice 2

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = 0$$

1<sup>er</sup> Stabilité ?

il faut calculer les valeurs propres de la matrice A

$$P(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det \begin{vmatrix} \lambda + 2 & 4 \\ -2 & \lambda - 5 \end{vmatrix}$$

$$P(\lambda) = (\lambda + 2)(\lambda - 5) + 8 = \lambda^2 - 3\lambda - 2$$

on calcule les racines

$$\Delta = (-3)^2 - 4(-2) = 9 + 8 = 17$$

$$\lambda_1 = \frac{3 + \sqrt{17}}{2} > 0 \quad \lambda_2 = \frac{3 - \sqrt{17}}{2} < 0$$

$\lambda_1 > 0 \Rightarrow$  système est instable

20/  $K = (k_1 \ k_2)$ ?  $P_{BF} = (\lambda+1)(\lambda+2)$   
 $P_{BF}(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2$

il faut d'abord vérifier que le système est commandable.

on construit la matrice de commandabilité:

$$C(A, B) = \begin{pmatrix} B & AB \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$C(A, B) = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{on calcule} \quad \det(C(A, B))$$

$$\det(C(A, B)) = -3 + 2 = -1 \neq 0$$

$\Rightarrow$  la matrice de commandabilité est de rang 2. et comme le système est d'ordre 2  $\Rightarrow$  système commandable

donc on cherche un retour d'état de la forme:  $u = r - Kx$  avec  $K = (k_1 \ k_2)$

$$A - BK = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} (k_1 \ k_2)$$

$$A - BK = \begin{pmatrix} -2 + k_1 & -4 + k_2 \\ 2 - k_1 & 5 - k_2 \end{pmatrix}$$

on calcule les valeurs propres de la matrice

$$(A - BK) \quad \begin{pmatrix} \lambda + 2 - k_1 & 4 - k_2 \\ -2 + k_1 & \lambda - 5 + k_2 \end{pmatrix}$$



$$P_{BF}(\lambda) = \det(\lambda I - (A - BK)) = (\lambda + 2 - k_1)(\lambda - 5 + k_2) - (4 - k_2)(-2 + k_1)$$

$$P_{BF}(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + k_2\lambda + 2\lambda - 10 + 2k_2 - k_1\lambda + 5k_1 - k_1k_2 + 8 + k_1k_2 - 2k_2 - 4k_1$$

$$P_{BF}(\lambda) = \lambda^2 + (-3 + k_2 - k_1)\lambda - 2 + k_1$$

$$= \lambda^2 + 3\lambda + 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3 + k_2 - k_1 = 3 \\ -2 + k_1 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_2 = 6 + k_1 \\ k_1 = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k_1 = 4 \\ k_2 = 10 \end{cases}$$

$$K = \begin{pmatrix} 4 & 10 \end{pmatrix}$$