Exemple d'un retour d'état

système de dimension 2 $\xrightarrow[\text{FTBO}]{}$ $G(p) = \dfrac{5}{(p+1)(p+10)} = \dfrac{Y}{U}$

Formalisme d'état : $\Rightarrow y'' + 11y' + 10y = 5u$

$$x_1 = y$$

$$x_2 = x'_1 = y'$$

$$x'_2 = y'' = -11y' - 10y + 5u$$

$$y'' = -11x_2 - 10x_1 + 5u$$

$$x' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -11 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{B} u$$

$$y = Cx = (5 \quad 0)\,\underline{x}$$

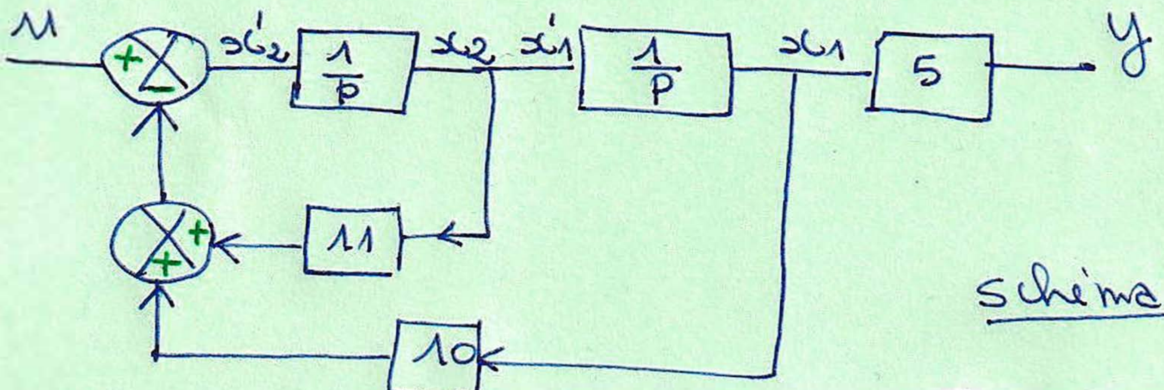


schéma bloc

on veut avoir grâce à un retour d'état un système avec un 1er dépassement de 9,5% et un temps $t_{pic} = 393$ ms (temps du 1er dépassement)

on vérifie d'abord que le système est commandable

$$Q_c = (B \quad AB) \qquad AB = \begin{pmatrix} 1 \\ -11 \end{pmatrix}$$

$$Q_c = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -11 \end{pmatrix} \qquad \det(Q_c) = 0 - 1 = -1 \neq 0$$

$\Rightarrow$ rang $Q_c = 2 =$ dimension du système $\Rightarrow$ le système est commandable

le polynôme caractéristique voulu suite au rel
d'état est $D(p) = p^2 + 2m\omega_n p + \omega_n^2$

avec $t_{pic} \times \omega_n = 3{,}93$ (pour un 1er Dépassement de 9,5%)

$$\Longrightarrow \omega_n = \frac{3{,}93}{0{,}393} = 10\ \mathrm{rad.s^{-1}}$$

et pour $D_1\% = 9{,}5 \Longrightarrow m = 0{,}6$ (coefficient d'amortissement)

Donc $D(p) = p^2 + 2\times 0{,}6 \times 10\,p + 10^2$

$$\boxed{D(p) = p^2 + 12p + 100}$$

On calcule les valeurs propres de la matrice $(A-BK)$

$$A - BK = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -11 \end{pmatrix}}_{A} - \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{pmatrix} k_1 & k_2 \end{pmatrix}}_{K}$$

$$A - BK = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -10-k_1 & -11-k_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } \big(pI - (A-BK)\big) = \begin{pmatrix} p & -1 \\ k_1+10 & p+k_2+11 \end{pmatrix}$$

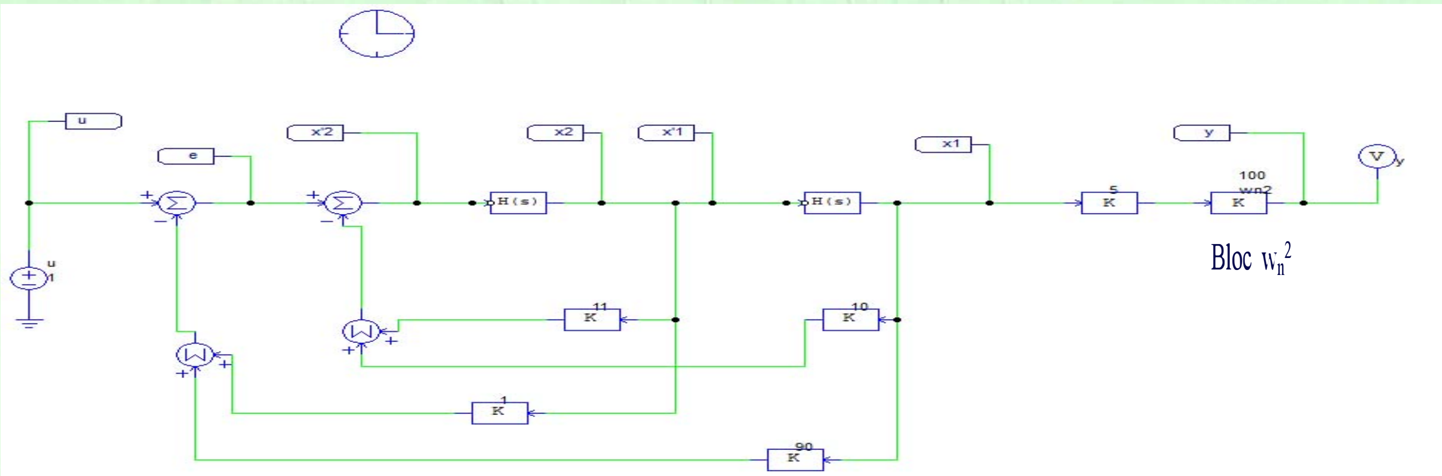
$$\text{et } \det\big(pI - (A-BK)\big) = p(p+k_2+11) + k_1+10$$

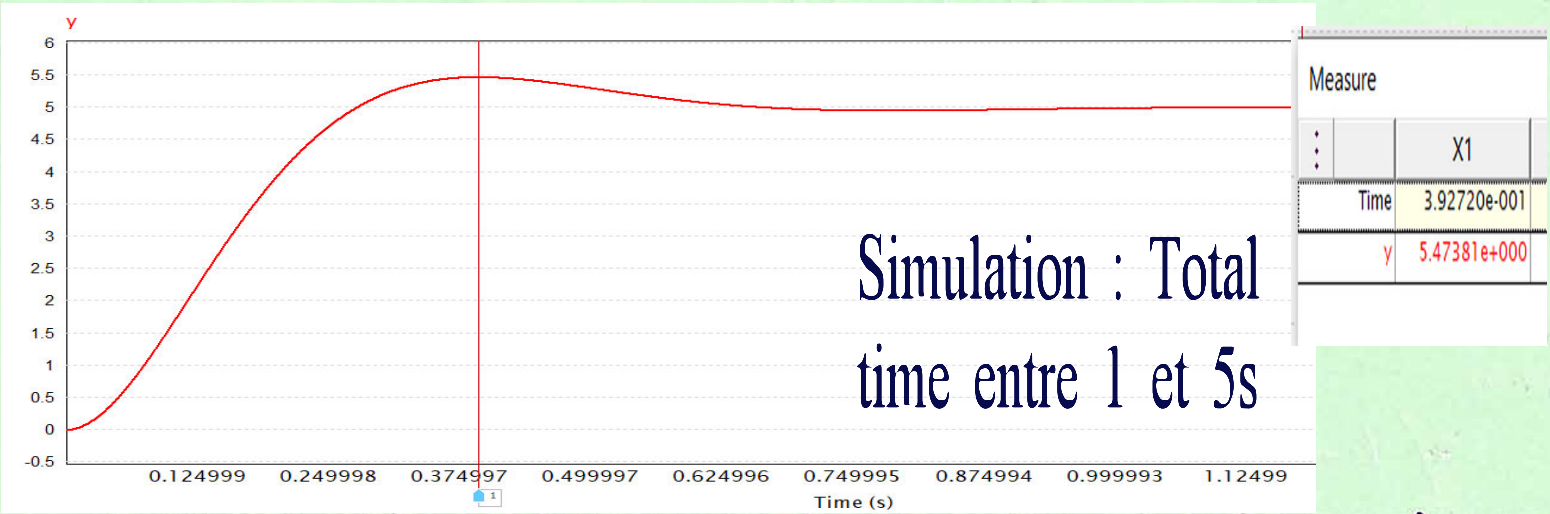
$$\Longrightarrow \underbrace{p^2 + (k_2+11)p + k_1 + 10}_{\det(pI-(A-BK))} = \underbrace{p^2 + 12p + 100}_{D(p)}$$

ceci est vrai si $\begin{cases} k_2+11 = 12 \\ k_1+10 = 100 \end{cases}$

$\Longrightarrow \begin{cases} k_2 = 12-11 = 1 \\ k_1 = 100-10 = 90 \end{cases}$

donc $K = (k_1 \quad k_2) = (90 \quad 1)$





Attention : forme canonique d'un second ordre : $G(p) = \dfrac{1}{1+\frac{2m}{w_n}p+\frac{p^2}{w_n^2}} = \dfrac{w_n^2}{p^2+2mw_np+w_n^2}$

il faut ajouter w_n^2 dans le schéma bloc

on vérifie bien que le dépassement 1er

$\begin{cases} D_1\% = \dfrac{5{,}47-5}{5} = 9{,}45\% \text{ et} \\ t_{pic} = 392{,}8\,ms \end{cases}$