

Correction Exercice 1

①

$$10/ \quad G(p) = C \cdot (pI - A)^{-1} \cdot B + D$$

$$D=0, \quad C = (3 \quad 1), \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 10 & -3 \end{pmatrix}$$

$$pI - A = \begin{pmatrix} p-2 & 0 \\ -10 & p+3 \end{pmatrix} \quad \det(pI - A) = (p-2)(p+3)$$

$$(pI - A)^{-1} = \frac{1}{\det(pI - A)} \cdot \text{Adj}(pI - A)$$
$$= \frac{1}{(p-2)(p+3)} \begin{pmatrix} p+3 & 0 \\ 10 & p-2 \end{pmatrix}$$

$$(pI - A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{p-2} & 0 \\ \frac{10}{(p-2)(p+3)} & \frac{1}{p+3} \end{pmatrix}$$

$$C \times (pI - A)^{-1} = (3 \quad 1) \begin{pmatrix} \frac{1}{p-2} & 0 \\ \frac{10}{(p-2)(p+3)} & \frac{1}{p+3} \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{3}{p-2} + \frac{10}{(p-2)(p+3)}, \quad \frac{1}{p+3} \right)$$

$$\text{finalement } G(p) = \left(\frac{3}{p-2} + \frac{10}{(p-2)(p+3)}, \quad \frac{1}{p+3} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$G(p) = \frac{3}{p-2} + \frac{10}{(p-2)(p+3)} = \frac{3(p+3) + 10}{(p-2)(p+3)}$$

$$\boxed{G(p) = \frac{3p+19}{(p-2)(p+3)}}$$

(2)

2°/ Valeurs propres de la matrice A

$$\det(pI - A)? \quad pI - A = \begin{pmatrix} p-2 & 0 \\ -1 & p+3 \end{pmatrix}$$

$$\det(pI - A) = (p-2)(p+3) = 0$$

$$p_1 = 2 \text{ et } p_2 = -3 \quad (\text{les 2 valeurs propres})$$

on a une valeur propre à partie réelle $> 0 \Rightarrow$ système est instable.

3°/ Commandabilité

$$Q_c = (B \quad AB)$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Q_c = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det(Q_c) = 1 \neq 0 \Rightarrow$ le rang de A est égal à la dimension du système $(m=n) \Rightarrow$ système est commandable

4°/ $K = (k_1 \ k_2) \Rightarrow$ pôles -1 et -2
 Polynôme caractéristique désiré:
 $P_c(p) = (p - (-1))(p - (-2)) = p^2 + 3p + 2$
 Formule d'Achermann: $K = (0 \ 1) Q_c^{-1} P_c(A)$
 on calcule Q_c^{-1} : matrice inverse de la matrice de commandabilité

$$Q_c = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Q_c^{-1} = \frac{1}{\det(Q_c)} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(Q_c) = 10$$

(3)

$$Q_c^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

$$P_c(A) = A^2 + 3A + 2I$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 10 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 10 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -10 & 9 \end{pmatrix}$$

$$3A = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 30 & -9 \end{pmatrix}$$

$$2I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P_c(A) = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 20 & 2 \end{pmatrix}$$

Donc $K = (0 \ 1) Q_c^{-1} \times P_c(A)$

$$Q_c^{-1} \cdot P_c(A) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 20 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -\frac{2}{5} \\ 2 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

finalement $K = (0 \ 1) \begin{pmatrix} 8 & -\frac{2}{5} \\ 2 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

$$\boxed{K = (2 \ \frac{1}{5})}$$

50/

(3)

Formule d'Ackermann
pour un observateur d'état

$$L = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \end{pmatrix} = \Phi(A) \cdot Q_0^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Polynôme désiré: $\Phi(p) = (p - (-5))(p - (-8))$
pour l'observateur

$$\Phi(p) = p^2 + 13p + 40$$

on construit la matrice $\Phi(A) = A^2 + 13A + 40I$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 10 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 10 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -10 & 9 \end{pmatrix}$$

$$13A = \begin{pmatrix} 26 & 0 \\ 130 & -39 \end{pmatrix} \text{ et } 40 \cdot I = \begin{pmatrix} 40 & 0 \\ 0 & 40 \end{pmatrix}$$

donc $\Phi(A) = \begin{pmatrix} 70 & 0 \\ 120 & 10 \end{pmatrix}$

Matrice d'observabilité

$$Q_0 = \begin{pmatrix} c \\ CA \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 10 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & -3 \end{pmatrix}$$

$$Q_0 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 16 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } Q_0^{-1} = \frac{1}{\det(Q_0)} \times \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -16 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det(Q_0) = -9 - 16 = -25$$

$$Q_0^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{25} & \frac{1}{25} \\ 16/25 & -3/25 \end{pmatrix}$$

$$L = \Phi(A) \cdot Q_0^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\Phi(A) \cdot Q_0^{-1} = \begin{pmatrix} 70 & 0 \\ 120 & 10 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} \frac{3}{25} & \frac{1}{25} \\ \frac{16}{25} & -\frac{3}{25} \end{vmatrix}$$

$$\Phi(A) \cdot Q_0^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{210}{25} & \frac{70}{25} \\ \frac{520}{25} & \frac{90}{25} \end{pmatrix}$$

$$\text{finalemant } L = \begin{pmatrix} \frac{210}{25} & \frac{70}{25} \\ \frac{520}{25} & \frac{90}{25} \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} \frac{70}{25} \\ \frac{90}{25} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{14}{5} \\ \frac{18}{5} \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} \frac{14}{5} \\ \frac{18}{5} \end{pmatrix}$$